MODULO FORMATIVO:

MATEMATICA

Titolo dispensa: Minimo Comune multiplo, calcolo potenze e numeri decimali

DOCENTE: MICELI GIOVANNI

ENGIM EMILIA ROMAGNA Associazione Regionale
via Punta Stilo, 59 - 48124 RAVENNA / via Canonico Lugaresi, 202 - 47521 CESENA

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).

Minimo Comune multiplo

Il minimo comune multiplo (si scrive anche mcm) è il più piccolo numero che sia divisibile per tutti i numeri dati.

Che significa?

Se io ho tre numeri, il mcm è, tra i tanti possibili divisori, il più piccolo.

Per calcolare il mcm si prendono i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta con il massimo esponente.

Il modo migliore per comprendere l'enunciato è con degli esempi pratici. Proviamo ad esempio a **calcolare il minimo comune multiplo tra 20 15 30**.

Si inizia con la scomposizione in numeri primi dei tre dati da traccia. Per cui si ottiene:

20 = ?

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

10 = ?

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

30 = ?

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Come si calcola il minimo comune multiplo?

A questo punto riepilogando ottenuti scomponendo i numeri in fattori primi, usando le potenze posso scrivere:

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).

$20 = 2^2 \times 5$

$15 = 5 \times 3$

$30 = 2 \times 5 \times 3$

Completata la scomposizione in numeri primi, guardo ora solo i termini a destra dell'uguale, cioè i **fattori** – ti ricordiamo che si chiamano così "i numeri che sono moltiplicati tra loro".

Seleziono i fattori contenuti anche negli altri numeri prendendoli una sola volta con l'esponente più grande:

$20 = 2^2 \times 5$

$15 = 3 \times 5$

$30 = 2 \times 5 \times 3$

Attenzione ai termini evidenziati!

Quali termini abbiamo cerchiato in rosso? Le regole sono semplici:

- ogni fattore va cerchiato una sola volta, ecco perché il 5 e il 3 compaiono solo una volta con il cerchietto.
- tra due fattori uguali si sceglie quello con il grado massimo – quindi tra 2 al quadrato e 2, si sceglie quello con la potenza più alta.

Se ti stai chiedendo, in tutto ciò, **come si calcola il minimo comune multiplo**, sappi che hai praticamente fino. Ti basta semplicemente moltiplicare i fattori che hai evidenziato e calcolare il risultato finale:

$mcm = 2^2 \times 5 \times 3 = 60$

L'esercizio è così concluso.

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).

Esempio 1

Calcolare il minimo comune multiplo dei numeri 270, 144 e 224.
Iniziamo come sempre a scomporre in fattori primi i numeri datici dalla traccia:

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 224 & 2 \\ 112 & 2 \\ 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 7 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

A questo punto mi scrivo in maniera più compatta i risultati ottenuti con la scomposizione in numeri primi:

$$270 = 2 \times 3^2 \times 5$$

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

$$224 = 2^5 \times 7$$

Cerchiare i fattori presi una sola volta con il massimo esponente. Dovrai così cerchiare 2 elevato a 5, 3 elevato a 2, infine 5 e 7 che compaiono senza potenze. Puoi così scrivere, per il calcolo del mcm, che:

$$mcm = 2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 30240$$

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).

Esempio 2

Quello che vi proponiamo di risolvere assieme, ora, è un esercizio con semplici **operazioni con i numeri relativi** fratti, così che sia chiaro **a che serve il minimo comune multiplo**, almeno in questa prima parte del programma:

$$+\frac{3}{12}-\frac{4}{15}+1=$$

Iniziamo calcolando il minimo comune multiplo tra i tre denominatori. NOTA BENE: se uno degli addendi non ha la frazione, è sottinteso che il denominatore sia 1.

$$+\frac{3}{12}-\frac{4}{15}+\frac{1}{1}=$$

Scompongono 12, 15 in numeri primi. 1 posso anche ignorarlo…

$$12=2^2\times 3$$

$$15=5\times 3$$

$$mcm=5\times 3\times 2^2=60$$

A questo punto risolvo la frazione inserendo un solo denominatore comune, il minimo comune multiplo appena calcolato, così da poter scrivere:

$$\frac{(60\div 12\times 3)-(60\div 15\times 4)+(60\div 1\times 1)}{60}=$$

$$\frac{(5\times 3)-(4\times 4)+(60\times 1)}{60}=$$

$$\frac{15-16+60}{60}=+\frac{59}{60}$$

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).

In questo esercizio in realtà la seconda frazione, cioè 3/12, poteva essere semplificata: dato che 12:3=4, avrei più comodamente scrivere al posto di 3/12, la frazione 1/4. Il risultato sarebbe stato comunque lo stesso, ma avrei ridotto i calcoli.

Attenzione: prova sempre a semplificare le frazioni! Ti semplificherà la vita…

Potenze

Una potenza è formata da una **base, (**il numero in basso), ed un **esponente**, (il numero in alto).

$$3^2 = 9$$

Il numero 3 rappresenta la base della potenza

Il numero 2 rappresenta l'esponente della potenza

La regola dei segni nei numeri relativi

In algebra i segni dei numeri sono fondamentali. Per evitare qualsiasi tipo di errore consigliamo di ricordare una sola semplice regola:

- **esponente PARI** , il segno della potenza sarà sempre positivo
- **esponente DISPARI**, il segno della potenza non cambia

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).

Ad esempio, se devo risolvere una potenza negativa con indice pari, il risultato sarà sicuramente negativo.

$-5^2 = +25$

Se invece ho una **potenza ad indice negativo**, il segno meno resta.

$-5^3 = -125$

Proprietà delle Potenze

Proprietà delle potenze stessa base

Il **prodotto** di due potenze con la stessa base è una nuova potenza che ha per base la stessa base ed esponente la somma degli esponenti.

$$(-5)^{+2} \cdot (-5)^{-3} = (-5)^{+2-3} = (-5)^{-1}$$

Nell'esempio si nota come le due potenze, con esponenti +2 e -3, abbiano la stessa base, cioè -5. Essendoci un **prodotto**, si riscrive la base e si fa la **somma algebrica** degli esponenti, quindi si farà la somma o la differenza.

La **divisione**, detta anche **rapporto**, tra due potenze con stessa base mi dà come risultato una potenza con stessa base e differenza – cioè sottrazione – degli esponenti.

$$(-5)^{+2} : (-5)^{-3} = (-5)^{+2-(-3)} = (-5)^{+2+3} = (-5)^{+5}$$

In questo piccolo esercizio è possibile notare come l'unica differenza con il prodotto sta nel seno meno. Questo vuol dire che il -3 dovrà cambiare segno e diventare +3.

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).

Proprietà delle potenze stesso esponente

La **moltiplicazione** tra due potenze con stesso esponente mi dà come risultato una potenza in cui la base si ottiene dalla moltiplicazione delle due basi e l'esponente non cambia.

$$(-3)^{+2}\cdot(-5)^{+2}=[-3\cdot(-5)]^{+2}=(+15)^{+2}$$

Per risolvere l'esempio è stato sufficiente eseguire una banale moltiplicazione tra numeri relativi e conservare l'esponente.

Il **rapporto** tra due potenze con stesso esponente mi genera una nuova potenza con il rapporto delle basi e stesso esponente.

$$(-30)^{-2}:(+5)^{-2}=[-30:(+5)]^{-2}=(-6)^{-2}$$

Anche in questo caso l'esercizio si risolve in maniera molto semplice dividendo algebricamente le due basi, quindi **attenzione ai segni**, e mantenendo lo stesso esponente.

Potenza di potenza

La **potenza di una potenza** è una nuova potenza che conserva la base e per esponente ha il prodotto degli esponenti.

Potenze con esponente 0

Non rientrano proprio tra le proprietà delle potenze, ma si tratta di una breve parentesi molto semplice ma che non bisogna mai dimenticare.

Qualsiasi potenza con esponente pari a 0 dà come risultato sempre +1.

$$(-30)^0 = +1$$

Insomma non importa quale sia la base o il segno. Se l'esponente è 0, il risultato sarà sempre +1.

Potenze negative

Se l'esponente è negativo è necessario invertire denominatore e numeratore della potenza. E se "sotto" non c'è nulla, si consideri il denominatore pari a 1.

esempio.

$$\left[-\frac{3}{2}\right]^{-4} = \left[-\frac{2}{3}\right]^{+4} = \left[+\frac{2}{3}\right]^{+4} =$$

Per **trasformare le potenze negative** in positive, quindi basta semplicemente "capovolgere" la frazione, cioè si invertono numeratore e denominatore. In questo modo il -4 diventa +4. Nell'esempio scompare il segno meno dalla frazione perché l'esponente è pari, per cui il risultato è certamente positivo.

A questo punto non mi resta che elevare a potenza, magari aiutandomi con la calcolatrice, sia il numeratore che il denominatore ed ottengo il risultato finale.

$$= \left[+\frac{2}{3}\right]^{+4} = \left[+\frac{2^4}{3^4}\right] = +\frac{16}{81}$$

Nel caso in cui compaiono anche delle radici:

$$\sqrt[2]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

La radice quadra non è altro che una potenza che ha esponente frazionario $\frac{1}{2}$

Quindi diventerebbe:

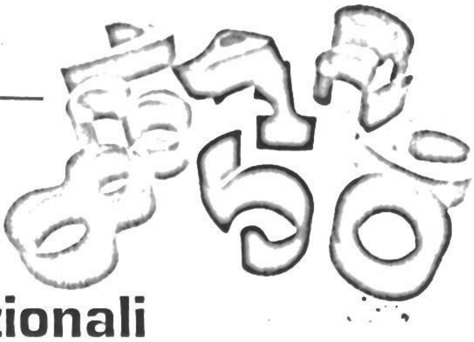
$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^6}$$

La radice cubica non è altro che una potenza che ha esponente frazionario $\frac{1}{3}$

$$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^6\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6\cdot\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).



unità didattica 9

I numeri decimali razionali e irrazionali

Dalle frazioni decimali ai numeri decimali e viceversa 9.1

Ogni frazione può essere scritta sotto forma di numero decimale e ogni numero decimale può essere scritto sotto forma di frazione:

$$\frac{11}{2} = 11 : 2 = 5{,}5$$

$$\frac{15}{4} = 15 : 4 = 3{,}75$$

ciò significa che $\frac{11}{2}$ e 5,5 così come $\frac{15}{4}$ e 3,75 sono due modi diversi per indicare lo stesso valore.
Nell'ultimo esempio 3 è la parte intera e 75 è la parte decimale (7 decimi e 5 centesimi).

> Una frazione decimale è una frazione avente per denominatore 10 o una potenza di 10 (100, 1.000, ecc.).
>
> $\frac{7}{10}, \frac{29}{100}, \frac{131}{1.000}$

Dalla frazione al numero decimale

Ogni frazione decimale può essere scritta sotto forma di numero decimale.
Per esprimere in forma di numero decimale una frazione decimale si scrivono le cifre del numeratore separando, a partire da destra verso sinistra per mezzo di una virgola, tante cifre decimali quanti sono gli zeri del denominatore:

$$\frac{441}{100} = 4{,}41; \quad \frac{5}{10} = 0{,}5; \quad \frac{3}{100} = 0{,}03$$

Dal numero decimale alla frazione

Per esprimere in forma di frazione decimale un numero decimale si scrive una frazione che ha per numeratore tutto il numero senza la virgola e per denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero dato:

$3{,}1 = \frac{31}{10}$; $1{,}009 = \frac{1.009}{1.000}$; $0{,}03 = \frac{3}{100}$

9.2 Numeri decimali limitati o finiti

Consideriamo le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{5}$, da esse si possono ricavare frazioni decimali equivalenti (applicando la proprietà invariantiva) i cui valori sono sempre dei **numeri decimali finiti**, cioè con un **numero limitato di cifre decimali** (la parte decimale è formata da una o due cifre):

$\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75 = \frac{75}{100}$; $\frac{7}{5} = 7:5 = 1{,}4 = \frac{14}{10}$

> Da **numeri decimali finiti, cioè con un numero limitato di cifre decimali**, si ottengono sempre frazioni decimali:
>
> $\frac{17}{20} = 17:20 = 0{,}85 = \frac{85}{100}$

Se noi osserviamo bene le frazioni date vediamo che i loro denominatori contengono solo i fattori: 2 e le sue potenze, 5 e le sue potenze o anche i fattori 2 e 5 insieme:

$\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{17}{20} = \frac{17}{2^2 \cdot 5}$

Solo in questo caso il valore delle frazioni è un numero decimale finito, che si può trasformare in frazione decimale.

> Sono frazioni riconducibili alla forma decimale quelle frazioni il cui denominatore **è scomponibile nei soli fattori 2 o 5 o entrambi.**
>
> $\frac{3}{2} = 3:2 = 1{,}5 = \frac{15}{10}$

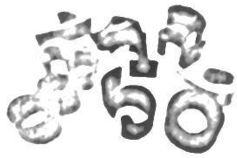
9.3 Numeri decimali illimitati periodici

Consideriamo le frazioni $\frac{5}{9}, \frac{3}{11}, \frac{45}{7}$, esse **non** sono ricondubili alla forma decimale perché il loro denominatore contiene un fattore diverso da 2, da 5 o dalle loro potenze. Il loro quoziente è un **numero decimale illimitato**:

Sviluppo

ENGIM EMILIA ROMAGNA Associazione Regionale
via Punta Stilo, 59 - 48124 RAVENNA / via Canonico Lugaresi, 202 - 47521 CESENA

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).



$\frac{5}{9} = 5 : 9 = 0,555...$ è un numero decimale illimitato

$\frac{3}{11} = 3 : 11 = 0,272727...$ è un numero decimale illimitato

$\frac{45}{7} = 45 : 7 = 6,428571...$ è un numero decimale illimitato non periodico

Periodico semplice

Un **numero** decimale illimitato si dice **periodico semplice** se dopo la virgola ha una cifra o un gruppo di cifre che si ripetono indefinitivamente:
0,555... si scrive $0,\overline{5}$ e si dice numero periodico semplice
0,2727... si scrive $0,\overline{27}$ e si dice numero periodico semplice
1,444... si scrive $1,\overline{4}$ e si dice numero periodico semplice
Le cifre che si ripetono formano il **periodo** e si indicano con un trattino sopra il **numero** detto **periodico**.

Periodico misto

Un **numero** decimale illimitato si dice **periodico misto** se tra la parte intera e il periodo ci sono delle cifre che non si ripetono. Queste cifre costituiscono l'**antiperiodo**.
$0,3222... = 0,3\overline{2}$ si dice numero periodico misto (antiperiodo 3, periodo 2)
$0,41666... = 0,41\overline{6}$ si dice numero periodico misto (antiperiodo 41, periodo 6)

> Un numero decimale illimitato si dice **periodico semplice** quando non ha l'antiperiodo. Un numero decimale illimitato si dice **periodico misto** quando ha l'antiperiodo.

Frazioni generatrici di numeri decimali periodici 9.4

Le frazioni $\frac{7}{11}$, $\frac{5}{12}$ si dicono **frazioni generatrici** perché danno origine a un numero decimale periodico.

$$\frac{7}{11} = 0,6363... = 0,\overline{63}$$

$$\frac{5}{12} = 0,41666... = 0,41\overline{6}$$

Per determinare le frazioni generatrici di numeri decimali periodici semplici $(0,\overline{6})$ o misti $(1,0\overline{6})$, è necessario seguire i seguenti passaggi:

Esercizi calcolo minimo comune multiplo:

m.c.m.(40, 20,5)

m.c.m.(72, 24,12)

m.c.m.(2, 3, 10)

m.c.m.(12, 15, 60)

Esercizi calcolo potenze:

$\left(\frac{1}{3}\right)^0$; $\left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{13} : \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$; $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} : \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$; $((2)^2)^3$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $(2)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} : \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$; $(2)^{-3}$

Esercizi trasformazione numeri decimali:

0.16

$0.\overline{10}$

$2.\overline{12}$

$1.2\overline{12}$

$0.34\overline{12}$

$0.00\overline{32}$

Operazione finanziata nell'ambito del Fondo Sociale Europeo (FSE) e sostenuta nell'ambito dell' Iniziativa per l'occupazione giovanile (IOG).

1) Problema
Un negoziante a fine stagione decide di applicare lo sconto del 15% su prodotti per capelli di una nota marca. Sapendo che il prezzo di listino è di Euro 180,00 quanto lo pagherò alla fine?

2) Problema
Una parrucchiera deve diluire 70 g. di colore con dell'acqua ossigenata nelle proporzioni di 1 : 2.Quanta acqua ossigenata sarà necessaria ?

3) Problema
Una parrucchiera deve diluire 90 g di colore concentrato con dell'acqua ossigenata nelle proporzioni di 1 : 1,5 .Quanta acqua ossigenata sarà necessaria ?